Математические модели в лингвистике

Математическая теория формальных языков

Мати Пентус, Александр Пиперски, Алексей Сорокин

МГУ им. М. В. Ломоносова, межфакультетский курс,
осенний семестр 2017–2018 учебного года, 11 октября

Мотивация

- Попробуем написать алгоритм автоматического образования множественного числа существенного в английском.
- Приблизительный алгоритм:
  - Если это исключение (*mouse*, *goose*, ...):
    Вернуть соответствующую форму (*mice*, *geese*, ...)
  - Если слово кончается на шипящий (*-ch*, *-sh*, *-zh*, *-x*, *-s*, *-z*):
    Добавить *-es*
  - Если слово кончается на согласный + *y* (*ally*, *cry*, ...):
    Заменить финальный *-y* на *-ies*.
  - Иначе добавить к слову *-s*.
- Хочется задавать это формально.
- То есть нужно математическое описание для условий вида:
  - Вставить -a в конце слова.
  - Заменить -o на -ue в первом слоге и т. д.

Формальные определения

- Σ — алфавит (произвольное конечное множество), его элементы — буквы. Например:
  - $\Sigma = \{a\}$, или $\Sigma = \{a, b\}$ или $\Sigma = \{a, b, c\}$;
  - Σ — буквы кириллического или латинского алфавита;
  - Σ — элементы международного фонетического алфавита IPA;
  - Σ — грамматические категории и т.д.
- Слова — конечные последовательности элементов Σ, Σ^* — множество всех слов. ε — пустое слово (слово длины 0).
- Языки — произвольные подмножества Σ^*.
- Нам также понадобятся функции из Σ^* в Σ^* и бинарные отношения на множестве Σ^*, то есть подмножества $\Sigma^* \times \Sigma^*$.

Регулярные выражения

Пусть зафиксирован конечный алфавит Σ.

- Базовые регулярные выражения: элементы алфавита,
- Также есть константы 0 (пустой язык) и 1 (язык, содержащий только пустое слово ε).
- Бинарные операции: $|$ (объединение) и $\cdot$ (конкатенация или приписывание): $u \cdot v = uv$,
- Унарная операция $*$ (итерация, взять любое количество раз): L^* состоит из слов вида $u_1 \dots u_r$, где $r \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_r \in L$.
- Например, $(a|b)^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \dots\}$.
- $(a|ab)^* = \{w \in \{a, b\}^+ | \text{в } w \text{ нет подслова } bb\}$
- Приоритет операций: итерация, конкатенация, объединение. При этом значок конкатенации можно опускать.

Язык регулярный, если он задаётся регулярным выражением.

Примеры регулярных языков

- Все слова в алфавите $\{a, b\}$: $(a|b)^*$,
- Слова в алфавите $\{a, b, c\}$, где предпоследняя буква — b: $(a|b|c)^* b (a|b|c)$.
- Слова в алфавите $\{a, b, c\}$, содержащие ровно 2 буквы a: $(b|c)^* a (b|c)^* a (b|c)^*$.
- Слова нечётной длины в алфавите $\{a, b\}$: $((a|b)(a|b))^*$.
- Слова в алфавите $\{a, b, c\}$, содержащие чётное число букв a: $((b|c)^* a (b|c)^* a)(b|c)^*$.
- Слова в алфавите $\{a, b, c\}$, где перед a идёт только b: $((b|c)^* ba)^* (b|c)^*$.
- Непустые слова в алфавите $\{a, b\}$, в которых одинаковые буквы не идут подряд: $(a(ba)^*(b|1))|(b(ab)^*(a|1))$.
- Непустые слова в алфавите $\{a, b, c\}$, в которых одинаковые буквы не идут подряд: $(H|1)(cH)^*(1|c|cH)$, где H — ответ на предыдущий пункт.

Примеры регулярных выражений

Пусть $\Sigma = \{C, V, \overline{V}, -\}$ (согласный, безударный гласный, ударный гласный, слогораздел).

- Корректное разбиение на слоги:
  - В каждом слоге ровно одна гласная: $C^*(V|\overline{V})C^*$.
  - Ровно один слог ударный.
  - Пусть X — ударный слог, Y – безударный, тогда искомое выражение $(Y-)^*[(X-(Y-)^*Y)|X]$.
  - Эквивалентно $(Y-)^*X(-Y)^* = (C^*VC^*-)^*C^*\overline{V}C^*(-C^*VC^*)^*$.
- Разбиение слова на слоги, содержащее ровно 1 открытый слог (ударность не учитывается). $(C^*VC^+-)^*(C^*V)(-C^*VC^+)^*$
- “Гармония гласных” (гласные типа V_1 и V_2 не встречаются вместе): $(C|V)^*(V_1(C|V_1|V)^*|V_2(C|V_2|V)^*)$

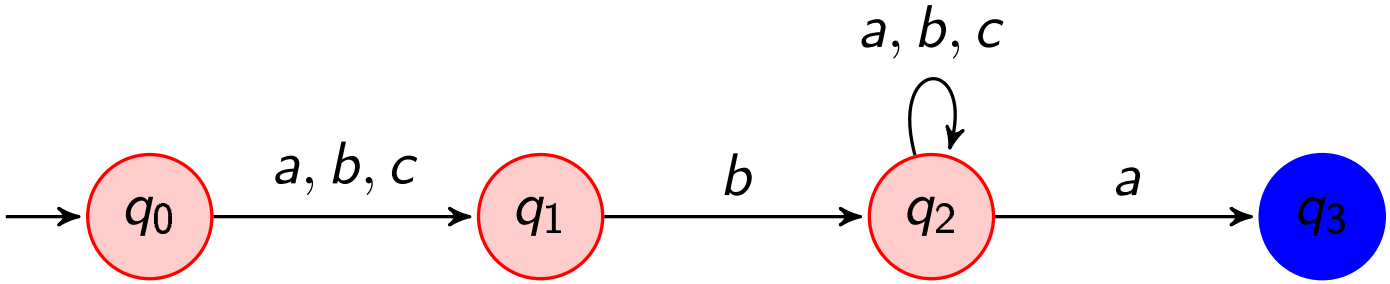
Примеры регулярных выражений

- Множественное число существительного в английском:
  - *-es* после шипящих (*s*, *x*, *z*, *ch*, *sh*, *zh*).
  - *-y* после согласных перед *-s* переходит в *-ie*.
- Удобней разбирать *witches* = *witche+s*, *enemies* = *enemie+s*.
- Искомое выражение $X = Ys$, где Y — выражение для основы.
- Основа — всё, что не кончается на *s*, *x*, *z*, *ch*, *sh*, *zh*, ***C****y*.
- Хочется задать отрицание условия...
- Симулируется через перечисление.

Примеры регулярных выражений

- Корректная основа:
  - Заканчивается на гласный, не равный y: $(C|V)^*(a|e|i|o|u)$.
  - Заканчивается на гласный+y: $(C|V)^*Vy$.
  - Содержит гласный и заканчивается на согласный, но не на s, x, z, h ($\mathbf{C}'$ — полный список таких согласных): $(C|V)^*V(C|V)^*C'$
  - Содержит гласный и заканчивается на h или $\mathbf{C}''h$, где $\mathbf{C}''$ обозначает любой согласный, кроме s, c, h: $(C|V)^*V((C|V)^*C'')?h$
- Всё вместе: $(C|V)^*((a|e|i|o|u|Vy) \mid V(h|(C|V)^*(C'|C''h))s$.

Определение конечного автомата



- Данная картинка описывает алгоритм, принимающий все слова w, где $w[1] = b$ и $w[-1] = a$.
- Принимаемые слова — метки путей из стартового состояния в завершающее.
- Как это задать формально?

Определение конечного автомата

Пусть Σ — конечный алфавит.

Определение конечного автомата

Конечный автомат: помеченный граф $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F \rangle$, где

- Q — конечное множество состояний (вершин графа),
- Δ — конечное множество переходов (рёбер с метками) вида $\langle q_1, w \rangle \to q_2$, $q_1, q_2 \in Q$, $w \in \Sigma^*$.
- $q_0 \in Q$ — стартовое состояние
- $F \subseteq Q$ — завершающие состояния.

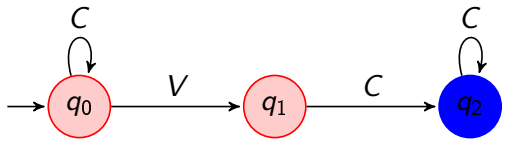
Метка пути — конкатенация всех меток на входящих в него рёбрах.

Язык $L(M)$ — метки путей из начального состояния в завершающие.

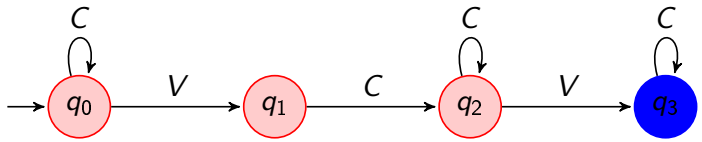
Язык — автоматный, если задаётся некоторым конечным автоматом.

Примеры конечных автоматов

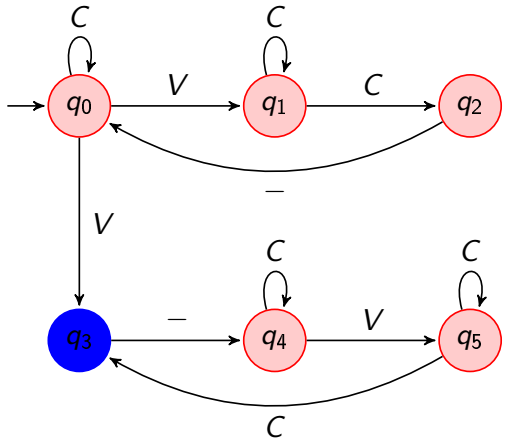
- Закрытый слог



- Слово с 2 гласными, разделёнными хотя бы одним согласным:

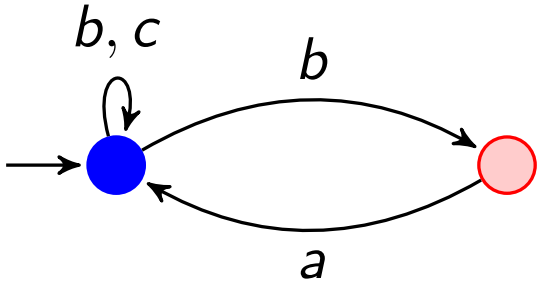


- Слогоделение ровно с одним открытым слогом:

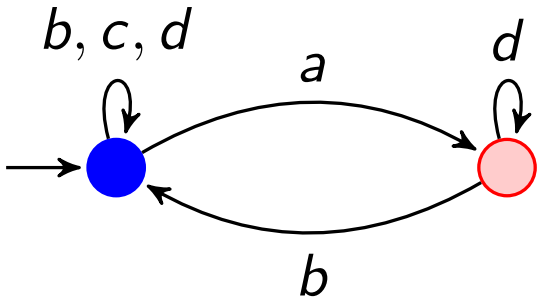


Конечные автоматы: примеры

- Каждой a непосредственно предшествует b, алфавит a, b, c.

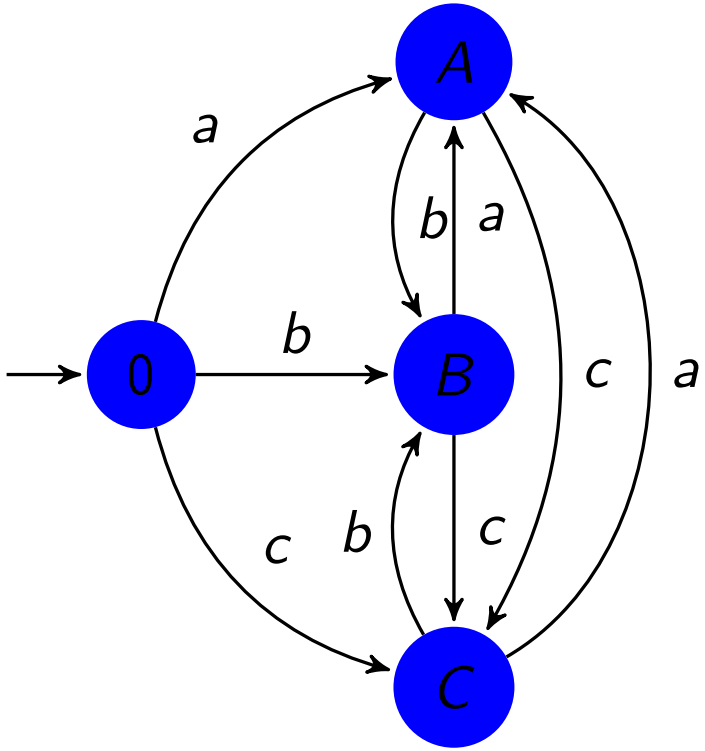


- Справа от каждой a есть парная ей b, между парными буквами нет a, c, алфавит a, b, c, d.



Конечные автоматы: примеры

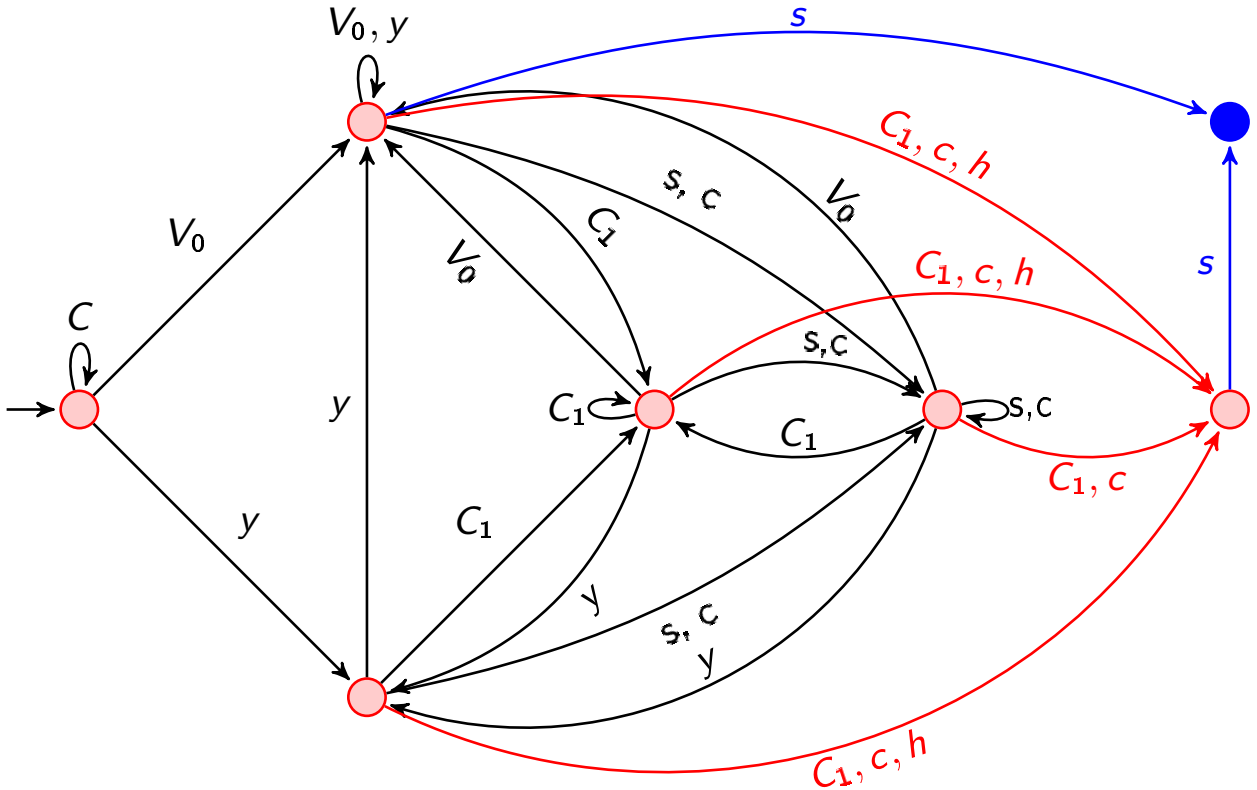
Нет повторяющихся букв, алфавит a, b, c. Состояния соответствуют буквам:



Конечные автоматы: примеры

- Формы множественного числа представимы в виде $\mathrm{stem} + \mathrm{s}$, где
- stem обязательно содержит гласную и не кончается на:
  - *-s, -x, -z, -sh, -ch, -zh* (шипящие).
  - **C***y*.
- Автомат для основ

  $(C_0 = C - \{s, x, z, c, h\}, C_1 = C_0 \cup \{s, x, z\})$:



Свойства автоматных языков

Теорема

Любой автоматный язык распознаётся автоматом с однобуквенными переходами.

Определение

Автомат с однобуквенными переходами — детерминированный, если ни из какого состояния нет двух переходов по одной и той же букве.

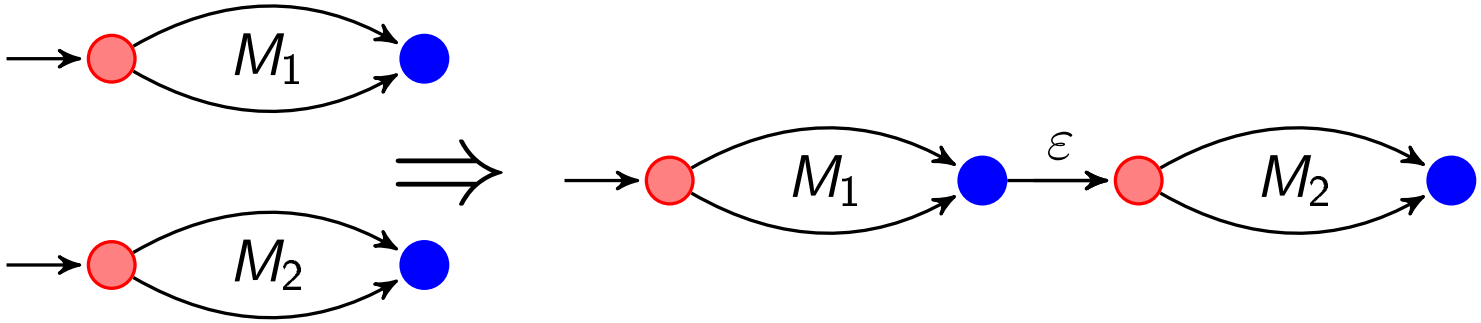
Теорема

Любой автоматный язык распознаётся детерминированным конечным автоматом.

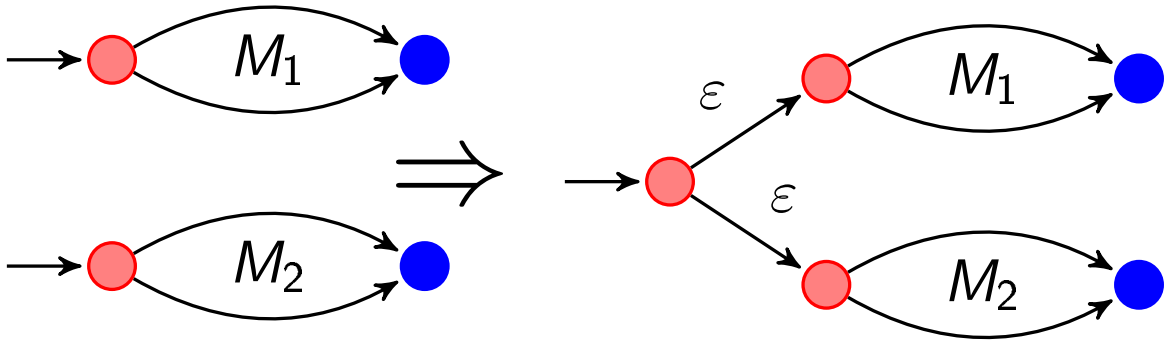
Свойства автоматных языков

Автоматные языки замкнуты относительно:

- Конкатенации.



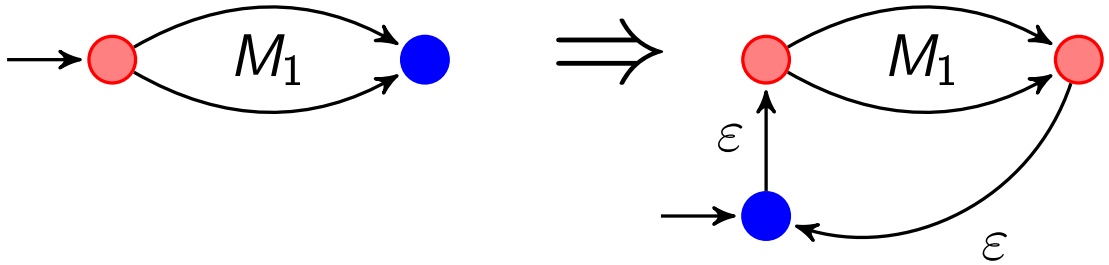
- Объединения:



Свойства автоматных языков

Автоматные языки замкнуты относительно:

- Итерации:



- Следствие: всякий регулярный язык является автоматным.
- На самом деле верно и обратное утверждение (теорема Клини): всякий автоматный язык регулярен.

Рекурсивное построение автоматов

- Автоматные языки замкнуты относительно:
  - Конкатенации.
  - Объединения.
  - Итерации.
  - Дополнения.
  - Пересечения.
- При этом соответствующие автоматы строятся алгоритмически.
- Вывод: автоматы можно строить поэтапно, “собирая” из простых сложные с помощью различных операций.

Рекурсивное построение автоматов

- Множественное число в английском:

$$(L_{sib} \cdot es) \cup (((\overline{L_{sib}} \cap L_C) \cup L_{Vy} \cup L_V) \cdot s),$$

где

  - L_{sib} — слова, кончающиеся на шипящий.
  - L_C — слова, кончающиеся на согласный.
  - L_{Vy} — слова кончающиеся на гласный+y.
  - L_V — слова, кончающиеся на гласный (не y).

- $L_{sib}, L_C, L_{Vy}, L_V$ — автоматные, финальный автомат строится рекурсивно.

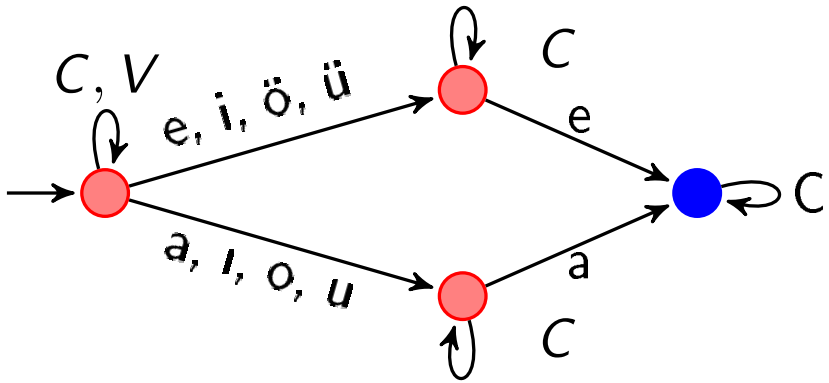
Рекурсивное построение автомата

Инфинитив глагола в турецком

Построить конечный автомат для инфинитива в турецком

- Инфинитив имеет форму основа+mEk.
- E равно e, если последний гласный основы — e, i, $ö$, $ü$, и a — если a, $ı$, o, u.

- M_1 — автомат для выражения C*V(C|V)*m(a|e)k.
- M_2 проверяет гармонию гласных:



- $M_1 \cap M_2$ — требуемый автомат.

Конечные преобразователи

Неформально, конечный преобразователь — это автомат с добавленными на рёбра выходными символами.

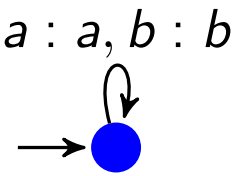
Пусть Σ, Γ — конечные алфавиты.

Определение конечного преобразователя

Конечный преобразователь: кортеж $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F \rangle$, где

- Q — конечное множество состояний
- $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ — конечное множество переходов
- $q_0 \in Q$ — стартовое состояние
- $F \subseteq Q$ — завершающие состояния.

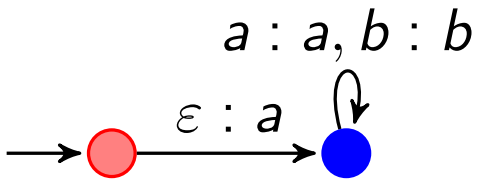
Простейший преобразователь — тождественный (алфавит a, b):



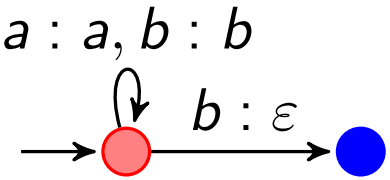
Конечные автоматы можно понимать как преобразователи, возвращающие свой вход (и проверяющие, что вход принадлежит нужному множеству).

Конечные преобразователи: примеры

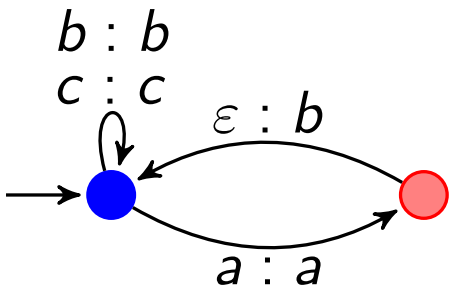
- Добавляет a в начале слова:



- Удаляет конечную b в тех словах, где она есть, и отвергает остальные:

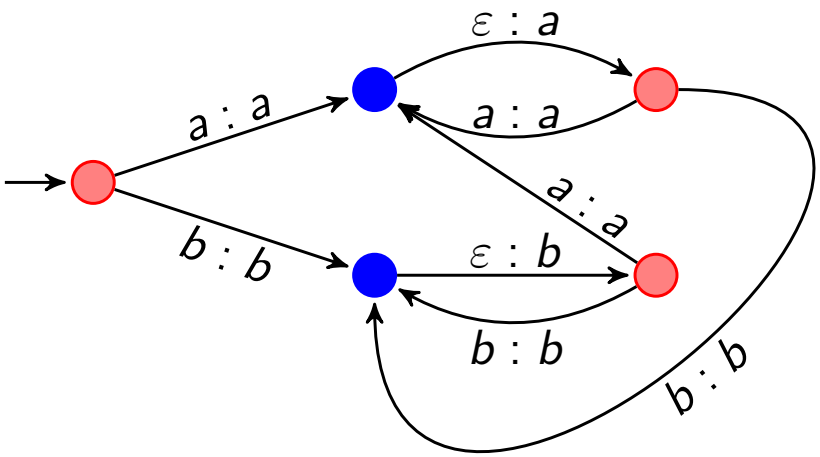


- После каждой a добавляет b:

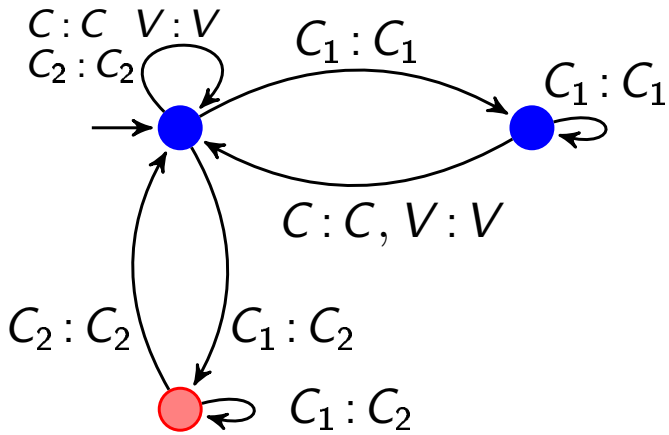


Конечные преобразователи: примеры

- Удваивает все буквы, кроме последней:



- Ретро-ассимилирует C_1 в C_2 (в последовательности C_1, идущей перед C_2, все буквы заменяются на C_2)



Свойства конечных преобразователей

- Замкнутость относительно операций:

Операция	Автоматы	Преобразователи
Конкатенация	Да	Да
Итерация	Да	Да
Объединение	Да	Да
Пересечение	Да	Нет
Дополнение	Да	Нет

Свойства конечных преобразователей

- Конечные преобразования также замкнуты относительно
  - Композиции ($\circ$).
  - Приоритетного объединения ($\cup_p$).

$$(T_1 \cup_p T_2)(u) = \begin{cases} T_1(u), & T_1(u) \neq \varnothing, \\ T_2(u), & T_1(u) = \varnothing. \end{cases}$$

  - Обращения ($(\cdot)^{-1}$): $\phi^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in \phi\}$.
- Применения операций:
  - Композиция: последовательное применение преобразований,
  - Обращение: переход от синтеза к анализу и наоборот,
  - Приоритетное объединение: отдельная обработка нерегулярных форм.

Множественное число существительного в английском

Пример.

Опишите преобразователь, преобразующий форму единственного числа существительного в форму множественного для английского языка.

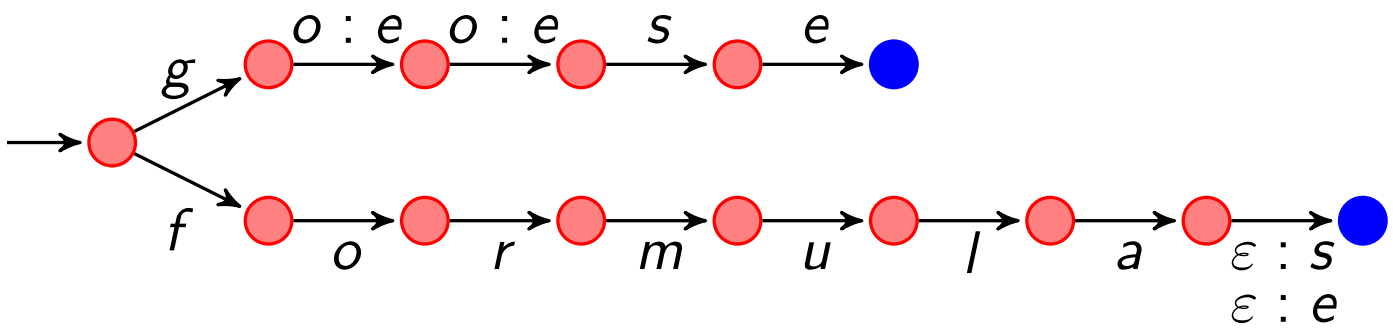
- *torch* $\leftrightarrows$ *torches*
- *monarch* $\leftrightarrows$ *monarchs*
- *ally* $\leftrightarrows$ *allies*
- *play* $\leftrightarrows$ *plays*
- *goose* $\leftrightarrows$ *geese*
- *formula* $\leftrightarrows$ *formulas/formulae*

Пример: множественное число в английском

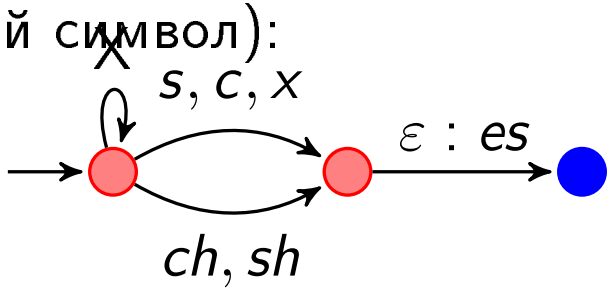
Пример.

Описать преобразователь, строящий форму множественного числа существительного в английском фзыке.

- Отдельный преобразователь T_{exc} для исключений:

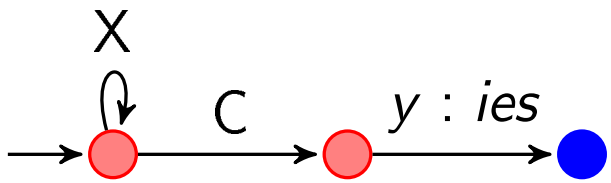


- T_{sib}: добавляет *-es* после финальной шипящей (X — произвольный символ):



Пример: множественное число в английском

- Преобазователь T_{exc} для исключений.
- Преобразователь T_{sib} для добавления *es*.
- Преобразователь T_{Cy} для замены *y* на *-ies* после согласной.



- T_s — добавляет s в конце.
- $T_{exc,sib}$ — добавляет s к исключениям на *-arch* и отвергает остальные слова (для *monarchs*, *tetrarchs*, . . .).
- Общее решение:

$$T_{exc} \cup_p T_{exc,sib} \cup_p T_{sib} \cup_p T_{Cy} \cup_p T_s$$